UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR **Trimestre: Ene-Mar 2010**
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS
MATEMÁTICA I (MA-1111)
**Fecha de publicación: 02 de febrero de 2010.**

*Contenido para el parcial: II*

## PRÁCTICA DE LA SEMANA 7

## Contenidos

- Continuidad de funciones.
- Tipos de discontinuidad.
- Teorema del valor intermedio.

## Ejercicios a resolver en la práctica

**1**. Para cada una de las funciones definidas a continuación estudia la continuidad en el punto indicado. En caso de ser discontinua indica el tipo de discontinuidad.

**a)** $h(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x(x+\pi)} & \text{si } x\neq 0 \ y \ x\neq -\pi \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ , en $x=0$.

**b)** $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x-4}{x^2-16} & \text{si } x\neq 4 \ y \ x\neq -4 \\ 2 & \text{si } x=4 \end{cases}$ , en $x=4$ y $x=-4$.

**c)** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+4x}{x} & \text{si } x<0 \\ 5 & \text{si } x=0 \\ 4+x^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$ , en $x=0$.

**d)** $w(x)=[\![\, \text{sen}\, x\,]\!]$, en $x=\pi$.

**2.** ¿Tiene sentido estudiar la continuidad en $x=-\pi$ en el problema 1a? Justifica tu respuesta.

**3.** Estudia la continuidad de la función *h*, definida por $h(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x<-1 \\ -1 & \text{si} \quad -1\le x\le \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\cos(x)}{\pi-2x} & \text{si} \quad \dfrac{\pi}{2}<x<4\pi \\ -\dfrac{1}{7\pi}+\text{sen}(x) & \text{si} \quad 4\pi\le x \end{cases}$.

**4.** Dada $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x+\text{sen}(ax)}{x} & \text{si} \quad x<0 \\ b+x^2 & \text{si} \quad 0\le x\le 1 \\ \sqrt{x}+1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$, halla los valores de $a$ y *b* para que la función *f* sea continua en $x=0$ y $x=1$.

**5.** Sea $g(x)=\begin{cases} (x-2)\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{x-2}\right) & \text{si} \quad x\neq 2 \\ 0 & \text{si} \quad x=2 \end{cases}$ ¿Es la función *g* continua en $x=2$?

**6.** Sea *f* una función de dominio $[-4,5)$, periódica de período 3, tal que

$$f(x)=\begin{cases} (x+1)^2 & \text{si} \quad -1\le x<1 \\ 4 & \text{si} \quad 1\le x<2 \end{cases}$$

**a)** Grafica la función *f*.
**b)** ¿Es *f* continua en $x=4$? Demuéstralo analíticamente.
**c)** ¿Es *f* continua en $x=-1$? Demuéstralo analíticamente.

**7.** Dada la función real de variable real definida por $f(x)=x^3-x$, demuestra que existe $c\in(-1,3)$ tal que $f(c)=6$ y hállalo.

**8.** Demuestra que existe un número real $z\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ tal que $\text{sen}\, z=\dfrac{1}{6}$.

**9.** Demuestra que la ecuación $x^4-x^3+x^2-3x-2=0$ tiene dos raíces reales distintas.

## Ejercicios propuestos

**1.** Sea $f(x)=\begin{cases} \cos x & \text{si} \quad x<0 \\ 4x^2+1 & \text{si} \quad 0\le x<\frac{1}{2} \\ \frac{1}{x}-2 & \text{si} \quad x\ge\frac{1}{2} \end{cases}$

**a**) Indica el dominio de la función *f*.

**b**) Calcula: **i**) $\lim_{x\to 0} f(x)$ **ii**) $\lim_{x\to 7} f(x)$ **iii**) $\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x)$ **iv**) $\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x)$ **v**) $\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$ **vi**) $\lim_{x\to -4\pi} f(x)$

**c**) ¿Es la función *f* continua en $x=0$? Justifica tu respuesta.

**d**) ¿Es la función *f* continua en $x=\frac{1}{2}$? Justifica tu respuesta.

**2.** Sea $f(x)=\begin{cases} \frac{10-x}{x^2-100} & \text{si} \quad x\ne 10 \quad y \quad x\ne -10 \\ 5 & \text{si} \quad x=10 \quad \text{ó} \quad x=-10 \end{cases}$

**a**) ¿Es la función *f* continua en $x=10$? Si es discontinua, clasifica la discontinuidad.

**b**) ¿Es la función *f* continua en $x=-10$? Si es discontinua, clasifica la discontinuidad.

**c**) ¿Es posible redefinir la función para hacerla continua en $x=10$? En caso afirmativo, ¿cómo la definirías para hacerla continua en $x=10$?

**d**) ¿Es posible redefinir la función para hacerla continua en $x=-10$? En caso afirmativo, ¿cómo la definirías para hacerla continua en $x=-10$?

**3.** ¿Es la función *f* definida por $\begin{cases} \frac{4-x^2}{\operatorname{sen}(\pi x)} & \text{si} \quad 1<x<2 \\ -\frac{4}{\pi} & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$ continua en $x=2$?

**4.** Dada la función signo definida por $\operatorname{sig}(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x>0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ -1 & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$, determina, si existen, los siguientes límites:

**a**) $\lim\limits_{x\to 1} \text{sig}(x)$ **b**) $\lim\limits_{x\to 0} \text{sig}(x)$ **c**) $\lim\limits_{x\to 1} \text{sig}\left(\left[\!\left[\,|x|\,\right]\!\right]\right)$

**5.** **a**) Dada la función real de variable real *g* definida por $g(x)=\begin{cases} x+a & \text{si} \quad x<2 \\ b & \text{si} \quad x=2 \\ \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$, donde $a$ y *b* son constantes, halla los valores de $a$ y *b* para que la función *g* sea continua en R.

**b**) Para los valores de $a$ y *b* determinados en la parte a) determina $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$.

**6.** Dada la función real de variable real definida como $f(x)=\begin{cases} 2x^2-4 & \text{si} \quad x\le -2 \\ ax+b & \text{si} \quad -2<x\le 1 \\ x^3+4x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$,

donde $a$ y *b* son constantes, halla los valores de $a$ y *b* para que *f* sea continua en todo R.

**7.** Sea *h* una función tal que $\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}\le h(x)\le \dfrac{\tan^2 3x}{2x^2}$. Calcula $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$

**8.** Demuestra que existe un número real $z\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ tal que $\cos z=\dfrac{1}{4}$.

**9.** Demuestra que la ecuación $x-\operatorname{sen} x=2$ tiene solución en el conjunto de los números reales.

**10.** ¿Existe una función *f* continua en $[3,7]$ tal que $f(4)=-2$ y $f(x)>0$ para todo $x\in[3,4)\cup(4,7]$? Justifica tu respuesta.

## Respuestas de los ejercicios propuestos

**1) a)** $\mathbb{R}$ **b) i)** 1 **ii)** $-\frac{13}{7}$ **iii)** 0 **iv)** 2 **v)** no existe **vi)** 1 **c)** Si **d)** No

**2) a)** No, hay una discontinuidad removible **b)** No, hay una discontinuidad no removible o esencial

**c)** Si , $f(x)=\begin{cases} \dfrac{10-x}{x^2-100} & \text{si} \quad x\neq 10 \quad y \quad x\neq -10 \\ 5 & \text{si} \quad x=-10 \\ -\dfrac{1}{20} & \text{si} \quad x=10 \end{cases}$ **d)** No

**3)** Si **4) a)** 1 **b)** no existe **c)** no existe

**5) a)** $a=-\frac{7}{4}$ y $b=\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **6)** $a=\frac{1}{3}$ y $b=\frac{14}{3}$ **7)** $\frac{9}{2}$ **10)** No

.

## Halla el error

- $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x<2 \\ 3 & \text{si} \quad x=2 \\ \mathrm{x}+3 & \text{si} \quad \mathrm{x}>2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x) \Rightarrow$ *f* es continua en $x=2$

- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}(kx)=k\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}x=k\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathrm{k}$

- $\lim_{x\to 0}\frac{x+\mathrm{sen}(\mathrm{b}x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(x+\frac{\mathrm{sen}(bx)}{x}\right)$

- $\lim_{x\to 0^-}\frac{\mathrm{sen}(ax)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{a\mathrm{sen}(x)}{x}=a$

- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$

- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan(x)=\frac{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\mathrm{sen}x}{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x}=\frac{1}{0}=\infty$

# Ejercicios Extras

## Parte I

1. Calcule los siguientes límites en el caso que existan y en caso contrario explique por qué no existen.

   *a*) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+5}{3x^2-2x+5}$.

   *b*) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x-1}-x)$.

   *c*) $\lim_{x\to-1^+} \frac{2x^2-x-3}{(x+1)^2}$.

2. Calcule los siguientes límites:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2+4x}}{6x-7} \text{ y } \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2+4x}}{6x-7}$$

3. Halle las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x^2+1}{|x+2|}$

4. Estudie la continuidad de la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2-1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

5. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ dos constantes. Sea

$$g(x) = \begin{cases} x+a & \text{si } x < 2 \\ b & \text{si } x = 2 \\ \frac{x-3+\sqrt{x-1}}{x^2-4} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

   Encuentre los valores de las constantes $a$ y $b$ para los cuales $g$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

6. Demuestre que la ecuación $\operatorname{sen}(x) - 2x\cos^2(x) = \frac{3}{4}$ tiene al menos una solución en los números reales.

7. Calcule los siguientes límites en el caso que existan y en caso contrario explique por qué no existen.

   *a*) $\lim_{x\to-1} \frac{1-\cos(x^2-1)}{x^3-x}$.

   *b*) $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{1-\sqrt{x}}$.

   *c*) $\lim_{x\to\infty}[\sqrt{x+1}-\sqrt{x}]$ donde $[x]$ = parte entera de x.

# Parte II

1. Demuestre los siguientes limites de funciones por definición formal de límite.

   a) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x+1}{3x+9} = \frac{5}{3}$.

   b) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$.

[redacted]

2. Hallar los siguientes límites:

   a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$.

   b) $\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$.

   c) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{9x^2+1} - 3x$.

   d) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-\operatorname{sen}(x)}{x^3}$.

[redacted]

3. Calcule los valores de $m$ y $n$ para que la función $f(x)$ sea continua en los reales.

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} 2mx - 3n + 2 & \text{si } x < 0 \\ m + nx + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ mx - 2n - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}.$$

---

4. a) Tomará $f(x) = x^5 + 4x - 1$ el valor igual a cero entre $x = 0$ y $x = 1$?.

   b) Cuál Teorema utilizaría en este caso?.

      1) El Teorema de Sandwich.
      2) El Teorema del Valor Intermedio.
      3) El Teorema del Valor Medio.

   c) Cuales hipótesis son necesarias para utilizar el Teorema anterior?.

5. Observando el gráfico de la función $f(x)$ (Figura 1),

[illegible] continua en dichos puntos.

---

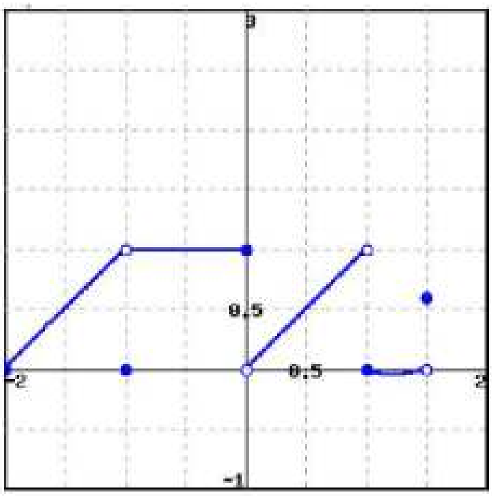


Figura 1: Gráfica de la función $f(x)$ del ejercicio 4

Practica elaborada por la Prof:
Aida Montezuma.
Ampliada por Prof
Antonio Di Teodoro. 2010. (Basada en prácticas anteriores de la USB-Matemáticas)